

## 2.2.22 Operace se zlomky

**Předpoklady:** 020221

**Pedagogická poznámka:** První příklad je opakovací na + -.

**Př. 1:** Vypočti.

a)  $\frac{5}{6} - \frac{7}{8}$

b)  $\frac{14}{25} : \frac{21}{40}$

c)  $\frac{7}{8} - \frac{11}{12}$

d)  $\frac{9}{22} : \frac{15}{33}$

a)  $\frac{5}{6} - \frac{7}{8} = \frac{5 \cdot 4}{6 \cdot 4} - \frac{7 \cdot 3}{8 \cdot 3} = \frac{20}{24} - \frac{21}{24} = -\frac{1}{24}$

b)  $\frac{14}{25} : \frac{21}{40} = \frac{14}{25} \cdot \frac{40}{21} = \frac{2 \cdot 7}{5 \cdot 5} \cdot \frac{5 \cdot 8}{3 \cdot 7} = \frac{16}{15}$

c)  $\frac{7}{8} - \frac{11}{12} = \frac{7 \cdot 3}{8 \cdot 3} - \frac{11 \cdot 2}{12 \cdot 2} = \frac{21}{24} - \frac{22}{24} = -\frac{1}{24}$

d)  $\frac{9}{22} : \frac{15}{33} = \frac{9}{22} \cdot \frac{33}{15} = \frac{3 \cdot 3}{2 \cdot 11} \cdot \frac{3 \cdot 11}{3 \cdot 5} = \frac{9}{10}$

**Př. 2:** Napiš postupy, jak se provádí následující operace se zlomky:

a) krácení zlomků

b) sčítání zlomků

c) násobení zlomků

d) odčítání zlomků

e) rozšiřování zlomků

f) dělení zlomků

Pospojuj operace do navzájem „opačných“ dvojic.

a) krácení zlomků

Vyškrtneme všechny společné dělitele čitatele a jmenovatele.

b) sčítání zlomků

Převédeme na společného jmenovatele (stejně velké kousky, výhodné použití nejmenšího společného jmenovatele) a sečteme čitatele.

c) násobení zlomků

Násobíme čitatele s čitateli a jmenovatele se jmenovateli (výhodné krácení před vynásobením).

d) odčítání zlomků

Stejně jako sčítání, čitatele odečítáme.

e) rozšiřování zlomků

Čitatele a jmenovatele vynásobíme stejným číslem.

f) dělení zlomků

Převédeme na násobení převrácenou hodnotou.

Navzájem „opačné“ dvojice tvoří operace:

- krácení a rozšiřování,
- sčítání a odčítání,
- násobení a dělení.

**Pedagogická poznámka:** Předchozí příklad kontrolujeme následujícím způsobem: U každého bodu skupina čtyř až pěti žáků přečte své postupy a zbytek třídy se pak může vyjádřit, zda u některého postupu nejsou faktické chyby nebo zda čtoucí žáci něco nezapomněli. Pokud někdo připomene něco podstatného, na co jiní žáci nevzpomenou (typicky krácení nebo nejmenší společný násobek), může dostat plus. Diskuse se na delší dobu zastaví u bodu b), kde řešíme problém s vnímáním postupů, který se v učebnici rozebírá za touto poznámkou.

Mnoho žáků v bodu b) sčítání zlomků přijde s dost odlišným postupem:

Vezmeme jmenovatel prvního zlomku a vynásobíme jím číselník druhého zlomku, potom jmenovatelem druhého zlomku vynásobíme číselník prvního zlomku, výsledný zlomek získáme tím, že do číselníku sečteme čísla získaná násobením a jmenovatel spočteme jako součin obou jmenovatelů.

Podobný způsob, jak popsat postup na sčítání zlomků se objevuje poměrně často a to hlavně u žáků, kteří mají s matematikou problémy. Ve skutečnost je to tak, že právě takto vnímané postupy jsou jednou z příčin toho, že jim matematika nejde.

Co je na takovém postupu, který odkazuje pouze na základní operace a nevyžaduje znalost ničeho dalšího, špatně?

- Je moc dlouhý a tím těžký na zapamatování.
- Počet kroků v takovém postupu je větší než je velikost pracovní paměti, což paměť přepřahuje a brání jakémukoliv dalšímu přemýšlení.
- Většina matematických postupů se dá nakonec převést na základní matematické operace a tudíž je takových postupů velmi mnoho, jsou si velmi podobné a snadno se pletou.
- Postup neobsahuje žádnou logiku a žádné důvody. Pokud se spletete, nemáme jako na to přijít ani jak se opravit.
- Postup je většinou velmi striktně zadaný (dá se provádět jen jedním způsobem) a jeho dodržováním si výpočet často značně komplikujeme (například v uvedeném případě nehledáme nejmenší společný jmenovatel a tak můžeme získat velmi složité zlomky i jednoduchých situacích).

Proto je toto „drobení“ postupů špatné a je lepší se mu vyhnout.

Správný postup by měl být sestaven z co nejmenšího počtu logických a zdůvodnitelných kroků. To, že obsahuje dříve probrané postupy není na škodu naopak nás to vede k opakování a lepšímu zapamatování.

**Matematické postupy se snažíme pamatovat jako sled menšího počtu logických kroků. To, že si musíme pamatovat dřívější látku, není na závadu, protože procvičování pomáhá paměti.**

**Pedagogická poznámka:** Diskuse o formě, kterou si děti pamatují postupy, je velmi potřebná. Korelace mezi drobením algoritmů a problémy s matematikou je velmi silná a snaha pamatovat si postupy v rozumnější formě je jedním ze základních předpokladů zlepšení.

**Pedagogická poznámka:** Každý z následujících příkladů procvičuje jednu z operací, které můžeme provádět se zlomky. Na každý máme předem určený čas, kdo nestihne správně vypočítat příklad, musí ho dopočítat doma a navíc spočítat odpovídající příklady na konci hodiny.

**Př. 3:** Převeď na základní tvar. Pokud to má smysl, vyjádři také jako smíšené číslo.

a)  $\frac{12}{15}$

b)  $\frac{56}{48}$

c)  $\frac{126}{132}$

a)  $\frac{12}{15} = \frac{4 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{4}{5}$

b)  $\frac{56}{48} = \frac{7 \cdot 8}{6 \cdot 8} = \frac{7}{6} = 1\frac{1}{6}$

c)  $\frac{126}{132} = \frac{2 \cdot 63}{2 \cdot 66} = \frac{63}{66} = \frac{3 \cdot 21}{3 \cdot 22} = \frac{21}{22}$

**Př. 4:** Vypočti. Výsledek uveď v základním tvaru. Pokud je výsledek větší než 1, uveď ho i ve tvaru smíšeného čísla.

a)  $\frac{2}{3} + \frac{3}{5}$

b)  $\frac{3}{7} - \frac{9}{14}$

c)  $\frac{7}{12} + \frac{2}{15}$

d)  $\frac{11}{15} - \frac{7}{20}$

a)  $\frac{2}{3} + \frac{3}{5} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5} + \frac{3 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{10}{15} + \frac{9}{15} = \frac{19}{15} = 1\frac{4}{15}$

b)  $\frac{3}{7} - \frac{9}{14} = \frac{3 \cdot 2}{7 \cdot 2} - \frac{9}{14} = \frac{6}{14} - \frac{9}{14} = -\frac{3}{14}$

c)  $\frac{7}{12} + \frac{2}{15} = \frac{7 \cdot 5}{12 \cdot 5} + \frac{2 \cdot 4}{15 \cdot 4} = \frac{35}{60} + \frac{8}{60} = \frac{43}{60}$

d)  $\frac{11}{15} - \frac{7}{20} = \frac{11 \cdot 4}{15 \cdot 4} - \frac{7 \cdot 3}{20 \cdot 3} = \frac{44}{60} - \frac{21}{60} = \frac{23}{60}$

**Př. 5:** Vypočti. Výsledek uveď v základním tvaru. Pokud je výsledek větší než 1, uveď ho i ve tvaru smíšeného čísla.

a)  $\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{5}$

b)  $\frac{24}{49} : \frac{32}{21}$

c)  $3 \cdot \frac{5}{12} \cdot \frac{8}{15}$

d)  $12 \cdot \frac{2}{15} : \frac{20}{27} : 9$

a)  $\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{10}$

b)  $\frac{24}{49} : \frac{32}{21} = \frac{24}{49} \cdot \frac{21}{32} = \frac{8 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7}{7 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 4} = \frac{9}{28}$

c)  $3 \cdot \frac{5}{12} \cdot \frac{8}{15} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 2}{3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5} = \frac{2}{3}$

d)  $12 \cdot \frac{2}{15} : \frac{20}{27} : 9 = \frac{12 \cdot 2}{15} \cdot \frac{27}{20} \cdot \frac{1}{9} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 9 \cdot 3}{5 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 9} = \frac{6}{25}$

**Př. 6:** Vypočti: a)  $\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{3}\right) \cdot \frac{4}{5} + \frac{1}{6}$

b)  $\left[\frac{15}{4} \cdot \frac{2}{5} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) \cdot 2\right] : \frac{22}{3}$

a)

$$\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{3}\right) \cdot \frac{4}{5} + \frac{1}{6} = \left(\frac{9-4}{12}\right) \cdot \frac{4}{5} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12} \cdot \frac{4}{5} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{2+1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

b)

$$\left[\frac{15}{4} \cdot \frac{2}{5} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) \cdot 2\right] : \frac{22}{3} = \left[\frac{3}{2} + \left(\frac{3-2}{6}\right) \cdot 2\right] : \frac{22}{3} = \left[\frac{3}{2} + \frac{1}{6} \cdot 2\right] : \frac{22}{3} = \left[\frac{3}{2} + \frac{1}{3}\right] : \frac{22}{3} = \left[\frac{9+2}{6}\right] : \frac{22}{3} = \frac{11}{6} \cdot \frac{3}{22} = \frac{1}{4}$$

**Shrnutí:**

